**Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica**
Fisciano, 10/1/2012

**Esercizio 1** Un esperimento consiste nel generare a caso un vettore di interi $(x_1, x_2, x_3, x_4)$, dove $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\ \forall i$.
(i) Si individui lo spazio campionario, determinandone la cardinalità.
(ii) Posto $A = \{$esattamente due elementi del vettore sono uguali tra loro$\}$ e $B = \{$gli elementi del vettore sono tutti numeri pari$\}$, si valuti l'indipendenza degli eventi $A$ e $B$.
(iii) Se ci sono esattamente due elementi del vettore uguali tra loro, qual'è la probabilità che si tratti di una coppia di numeri 1?

**Esercizio 2** Sia $X$ una variabile aleatoria continua avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} c(x - x^2) & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare il valore della costante $c$.
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Calcolare $E(X^n)$, $n \geq 1$.
(iv) Posto $Y = X^2 + 2$, calcolare $Cov(X, Y)$.

**Esercizio 3** Nell'esperimento del lancio di una coppia di dadi si considerino le seguenti variabili

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se i due dadi forniscono lo stesso esito,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se la somma degli esiti dei due dadi è minore o uguale a 4,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la densità discreta congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
(ii) Stabilire se $X$ ed $Y$ sono indipendenti e identicamente distribuite.
(iii) Calcolare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

**Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica**
Fisciano, 26/1/2012

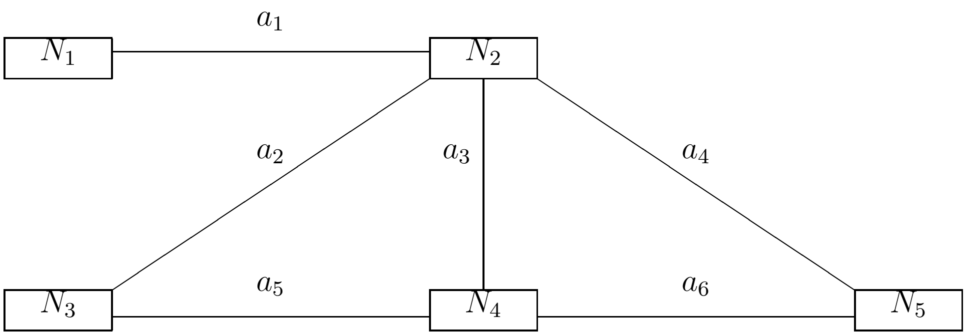
**Esercizio 1** Sia data un'urna contenente 2 biglie bianche e 2 rosse e si consideri l'esperimento consistente nel lanciare 2 volte una moneta truccata con probabilità di mostrare testa $p = 1/4$. Se esce testa $k$ volte ($k = 0, 1, 2$) si aggiungono nell'urna $k$ biglie bianche e $2 - k$ biglie rosse. Dall'urna così composta si effettuano poi due estrazioni senza reinserimento.
(i) Si calcoli la probabilità di estrarre dall'urna una biglia rossa ed una bianca.
(ii) Se dall'urna sono state estratte una biglia bianca ed una rossa, qual è la probabilità di aver ottenuto $k$ volte testa ($k = 0, 1, 2$) nel lancio della moneta?

**Esercizio 2** Si consideri l'esperimento che consiste nel generare a caso vettori booleani $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$, dove ogni elemento $x_i$ assume con uguale probabilità valore $\mathbf{0}$ ed $\mathbf{1}$ indipendentemente dagli altri. Sia $X$ la variabile aleatoria che rappresenta la lunghezza minima del vettore $\mathbf{x}$ affinché contenga $\mathbf{0}$.
(i) Si determini la distribuzione di $X$.
(ii) Si determini il valore di $n$ tale che $P(X \geq n) = \frac{1}{4}$.
(iii) Si calcoli $P(X \geq 5 \,|\, X \geq 3)$.

**Esercizio 3** Siano $X$ e $Y$ variabili aleatorie indipendenti, con $X$ normale di media 1 e varianza 4, ed $Y$ uniforme nell'intervallo $(-1, 1)$.
(i) Si determini la funzione di distribuzione congiunta $F_{X,Y}(x, y)$.
(ii) Si valuti $P(X \leq 1, Y \leq 1/2 \,|\, X \leq 0, Y \leq 1)$.
(iii) Si calcoli $E(X + Y)$ e $Var(X + Y)$.

**Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica**
Fisciano, 29/2/2012

**Esercizio 1** Si consideri l'esperimento che consiste nello scegliere a caso una coppia di nodi del seguente grafo:




(i) Determinare la cardinalità dello spazio campionario.
(ii) Studiare l'indipendenza dei seguenti eventi:
$A = \{$almeno uno dei 2 nodi scelti è connesso all'arco $a_1\}$,
$B = \{$i 2 nodi scelti insistono sullo stesso arco$\}$,
$C = \{$il nodo $N_5$ non viene scelto$\}$.

**Esercizio 2** Sia $X$ una variabile aleatoria continua avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ c\,x^2 + \dfrac{x}{2}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

(i) Calcolare il valore di $c$.
(ii) Ricavare la densità di probabilità di $X$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Determinare i momenti $E(X^n)$, $n \ge 1$.
(iv) Posto $Y = 2 - X^2$, ricavare $Cov(X, Y)$.

**Esercizio 3** Nell'estrazione con reinserimento di 2 biglie da un'urna contenente numeri da 1 a 5, sia $X$ il numero di volte che esce un numero pari, e sia $Y$ il numero massimo estratto.
(i) Determinare la densità di probabilità congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ e le densità marginali, verificando che la distribuzione di probabilità di $X$ è di tipo binomiale.
(ii) Ricavare la varianza di $X - Y$.
(iii) Calcolare il coefficiente di correlazione di $(X, Y)$.

**Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica**
Fisciano, 19/4/2012

**Esercizio 1** In una sala del centro di calcolo vi sono 12 studenti, di cui 2 sono iscritti al 1° anno, 4 sono iscritti al 2° anno e 6 sono iscritti al 3° anno di corso. Supponiamo che uno studente iscritto al $k$° anno di corso conosca almeno un linguaggio di programmazione con probabilità $k/3$ (per $k = 1, 2, 3$).

Se uno studente scelto a caso conosce almeno un linguaggio di programmazione, qual è la probabilità che sia iscritto al $k$° anno di corso? (per $k = 1, 2, 3$)

**Esercizio 2** Nell'esperimento che consiste nel lanciare a caso 3 monete non truccate, sia $X$ la variabile aleatoria che descrive il numero di volte che esce testa e sia $Y$ la variabile aleatoria così definita:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se esce testa per la prima volta al primo lancio,} \\ 2 & \text{se esce testa per la prima volta al secondo lancio,} \\ 3 & \text{se esce testa per la prima volta al terzo lancio,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Ricavare la funzione di probabilità congiunta di $(X, Y)$.
(ii) Stabilire se $X$ e $Y$ sono indipendenti.
(iii) Calcolare il coefficiente di correlazione di $(X, Y)$.

**Esercizio 3** Calcolare $P(-2 < X < 1)$, $P(X^2 < 4)$ e $P(-2 < X < 1 \,|\, X^2 < 4)$, supponendo che $X$ sia una variabile aleatoria avente
(i) distribuzione normale di valore medio $\mu = -0{,}5$ e varianza $\sigma^2 = 4$;
(ii) distribuzione esponenziale di valore medio $\mu = 1$.

**Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica**
Fisciano, 19/06/2012

**Esercizio 1** Cinque biglie di colore diverso (blu, rosso, verde, giallo e bianco) sono disposte allineate.
(i) Si calcoli la probabilità che ci sia esattamente una biglia tra la blu e la rossa.
(ii) Sapendo che tra la biglia blu e quella rossa è collocata almeno una biglia, qual è la probabilità che ve ne sia esattamente una?

**Esercizio 2** Si consideri l'esperimento che consiste nell'estrarre 3 carte da un mazzo di 52 carte da gioco (composto da 13 carte per 4 semi). Sia $X$ la variabile aleatoria che conta il numero di carte estratte che presentano lo stesso numero o la stessa figura.
(i) Si determini la distribuzione di $X$, $p_X(k) = P(X = k)$, $k = 0, 2, 3$.
(ii) Si determini la funzione di distribuzione di $X$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Si calcoli $E(X)$ e $Var(X)$.

**Esercizio 3** Siano $X$ e $Y$ variabili aleatorie discrete, con distribuzione congiunta

$$p_{X,Y}(x, y) = c\,(x^2 + x|y|), \qquad x = 0, 1, \qquad y = -1, 0, 1.$$

(i) Si determini il valore della costante $c$.
(ii) Si determinino le distribuzioni marginali $p_X(x)$ e $p_Y(y)$.
(iii) Si verifichi se $X$ e $Y$ sono indipendenti.
(iv) Si calcoli $E(X/(Y + 2))$.

**Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica**
Fisciano, 05/07/2012

**Esercizio 1** Si consideri l'esperimento che consiste nel trasmettere una sequenza di 4 bit inviati in successione in modo indipendente l'uno dall'altro, dove i valori **0** ed **1** di ciascun bit sono equiprobabili. Sia

$$p_k = \frac{k}{6}$$

la probabilità che si verifichi un errore nel trasmettere il bit $k$-esimo ($k = 1, 2, 3, 4$).
(i) Si calcoli la probabilità di avere almeno un errore sulla sequenza di 4 bit.
(ii) Si determini la probabilità che la sequenza di 4 bit contenga esattamente un errore.
(iii) Se i primi 2 bit sono trasmessi correttamente, qual è la probabilità di avere almeno un errore sulla sequenza di 4 bit?

**Esercizio 2** Sia $X$ una variabile aleatoria assolutamente continua con densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \geq a, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Calcolare il valore della costante $a$.
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione della variabile $X$.
(iii) Determinare se esiste un valore di $n \geq 0$ tale che

$$P(2^n < X \leq 2^{n+1}) = \frac{1}{4}.$$

(iv) Posto $Y = 1/X$, calcolare $E(Y)$ e $Var(Y)$, ed utilizzare la disuguaglianza di Chebyshev per individuare una limitazione inferiore alla probabilità

$$P\left(\left|Y - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right).$$

**Esercizio 3** Si consideri l'esperimento che consiste nel lanciare 4 monete non truccate. Sia $X$ la variabile aleatoria che conta il numero di ripetizioni (si ha una ripetizione quando l'esito di un lancio è uguale a quello del lancio precedente) e sia

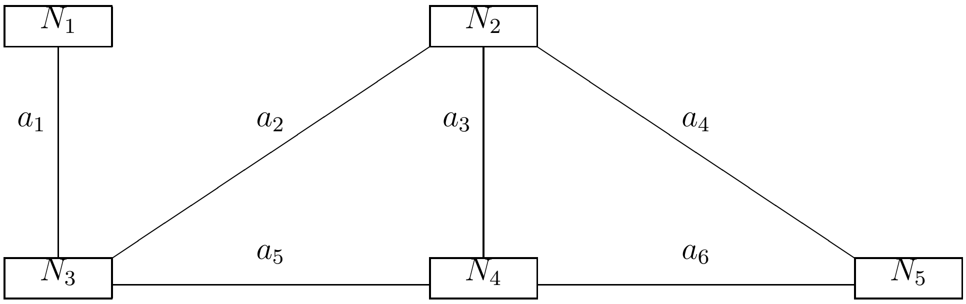
$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se il numero di teste è maggiore o uguale al numero di croci,} \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la densità di probabilità congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ e le densità marginali.
(ii) Calcolare $E(X + Y)$ e $E(X \cdot Y)$.
(iii) Calcolare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

**Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica**

Fisciano, 10/9/2012

**Esercizio 1** Si consideri l'esperimento che consiste nello scegliere a caso una coppia di nodi del seguente grafo:




(i) Determinare la cardinalità dello spazio campionario dell'esperimento.
(ii) Studiare l'indipendenza dei seguenti eventi:
$A = \{$almeno uno dei 2 nodi scelti insiste sull'arco $a_3\}$,
$B = \{$i 2 nodi scelti insistono su archi diversi$\}$,
$C = \{$al più uno dei 2 nodi scelti ha indice pari$\}$.

**Esercizio 2** Sia $X$ una variabile aleatoria continua avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1-(1-x)^2 & 0 \leq x < 1, \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

(i) Ricavare la densità di probabilità $f(x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Calcolare $E(X^n)$, per $n \geq 1$, e

$$P\left[|X - E(X)| \leq \sqrt{Var(X)}\right].$$

(iii) Posto $Y = \alpha X^2$, calcolare $Cov(X,Y)$ e stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta $Cov(X,Y) \geq 0$.

**Esercizio 3** Un esperimento consiste nel lanciare a caso 4 monete non truccate. Sia $X$ la variabile aleatoria che descrive il numero di volte che esce testa, e sia $Y$ la variabile aleatoria così definita:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se in almeno 3 lanci consecutivi si ha lo stesso risultato,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Ricavare la densità discreta congiunta $p(x,y) = P(X = x, Y = y)$.
(ii) Stabilire se $X$ e $Y$ sono indipendenti.
(iii) Calcolare il coefficiente di correlazione di $(X,Y)$.